Analyse, feuille d'exercices numéro 1
Rappels sur les espaces complets

M1 Mathématiques, S7 2026/2027

Exercice 1

Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans X telle que $d(x_{n+1}, x_n) \leqslant \frac{1}{2}d(x_n, x_{n-1})$ pour tout entier n. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 2

Soit (X, d) un espace métrique et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy à valeurs dans X. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si elle admet une valeur d'adhérence.

Exercice 3

Soit (X, d) un espace métrique compact et soit $C(X, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues $f : X \to \mathbb{R}$. Pour tout f appartenant à $C(X, \mathbb{R})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

(1) Montrer que $\| \ \|_\infty$ est une norme sur $C(X, \mathbb{R})$.

(2) Montrer que $(C(X, \mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ est un espace de Banach.

Exercice 4

On note $E = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ Lipschitzienne}\}$.

(1) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(2) Pour tout f dans E, on note

$$K(f) = \sup_{0\leqslant x<y\leqslant 1} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|.$$

(a) Justifier l'existence de $K(f) \in \mathbb{R}^+$ pour tout f dans E ;

(b) Pour tout $f \in E$, posons $\|f\|_L = |f(0)| + K(f)$. Montrer que $\| \ \|_L$ est une norme.

(c) Montrer que pour tout x dans $[0, 1]$, on a $|f(x)| \leqslant \|f\|_L$.

(3) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour $\| \ \|_L$.

(a) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$;

(b) Montrer que la suite $(K(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(c) Montrer que f est Lipschitzienne ;

(d) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans E pour la norme $\| \ \|_L$ et en déduire que $(E, \| \ \|_L)$ est complet.

Exercice 5

On considère $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout f dans $C^1([0, 1], \mathbb{R})$, on note $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [0, 1]\}$.

(1) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par
— $f_n(t) = 1$ si $0 \leqslant t \leqslant 1/2$,
— $f_n(t) = 1 + n/2 - nt$ si $1/2 \leqslant t \leqslant 1/2 + 1/n$,

— $f_n(t) = 0$ si $1/2 + 1/n \leqslant t \leqslant 1$.

(a) Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0,1]$, on pose

$$g_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt.$$

(i) Montrer que g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

(ii) Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g avec $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x$ si $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ et $g(x) = 1/2$ si $1/2 \leqslant x \leqslant 1$.

(2) L'espace vectoriel normé $(C^1([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ est-il un espace de Banach ?

Exercice 6

Soit $(E, \| \quad \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On rappelle la définition de la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E)$, l'algèbre des endomorphismes de E :

$$|||X||| = \sup_{x\in E,\, x\neq 0} \frac{\|X(x)\|}{\|x\|}$$

pour tout X dans $\mathcal{L}(E)$.

(1) Montrer que $(\mathcal{L}(E), ||| \quad |||)$ est un espace de Banach.

(2) Soit X un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que $|||X||| < 1$. Montrer que la série $\sum X^n$ converge dans $\mathcal{L}(E)$ et déterminer sa limite.

(3) Montrer que la série $\sum \frac{X^n}{n!}$ converge pour tout X dans $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 7

Soit $(E, \| \ \|_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et soit $(F, \| \ \|_F)$ un $\mathbb{K}$-espace de Banach. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On rappelle la définition de la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E,F)$, l'espace vectoriel des applications linéaires bornées (c'est à dire continues) de E dans F :

$$|||T|||_{E,F} = \sup_{x\in E,\, x\neq 0} \frac{\|X(x)\|F}{\|x\|_E}$$

pour tout T dans $\mathcal{L}(E,F)$. L'objectif de cet exercice est de montrer que $(\mathcal{L}(E,F), ||| \quad |||_{E,F})$ est un espace de Banach.

(1) Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{L}(E,F), ||| \quad |||_{E,F})$.

(a) Montrer que la suite $(|||T_n|||_{E,F})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(b) Montrer que pour tout x dans E, la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F. On notera $T(x)$ sa limite.

(c) Montrer que $T : E \to F; x \mapsto T(x)$ est une application linéaire continue.

(2) Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T pour la norme $||| \quad |||_{E,F}$.