Analyse, feuille d'exercices numéro 3
Espaces de Hilbert

M1 Mathématiques, S7 2026/2027

Sauf mention contraire, pour $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert (réel ou complexe), le produit scalaire sera noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme associée $\| \cdot \|$. On notera $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'algèbre des endomorphismes bornés (c'est à dire continus) de $\mathcal{H}$ et $||| \cdot |||$ la norme d'opérateurs sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Exercice 1

Montrer que pour toute fonction continue $f : [0,1] \to]0, +\infty[$, on a

$$\int_0^1 f(t)dt \int_0^1 \frac{1}{f(t)}dt \geqslant 1.$$

Exercice 2

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable et soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$.

(1) Soit ξ un élément de $\mathcal{H}$. Montrer que la suite $(\langle \xi, e_n \rangle_{\mathcal{H}})_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$.

(2) Considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathcal{H} & \to & \ell^2(\mathbb{N}) \\ \xi & \mapsto & (\langle \xi, e_n \rangle_{\mathcal{H}})_{n\in\mathbb{N}}. \end{array}$$

(a) Montrer que Ψ est une application linéaire isométrique.

(b) Montrer que Ψ est une isométrie.

Exercice 3

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, soit E un sous-espace vectoriel fermé de H et soit p_E la projection orthogonale sur E.

(1) Montrer que $|||p_E||| = 1$.

(2) Montrer que $\langle p_E(x), y \rangle = \langle x, p_E(y) \rangle$ pour tout x et y dans $\mathcal{H}$.

(3) Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de E et soit x appartenant à $\mathcal{H}$.

(a) Montrer que $\sum \langle x, e_n \rangle e_n$ converge dans $\mathcal{H}$.

(b) Montrer que

$$p_E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Exercice 4
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit p un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ idempotent, c'est à dire vérifiant $p \circ p = p$.

(1) Montrer que $\ker p$ et $\operatorname{im} p$ sont fermés.

(2) On suppose que
$$\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$$
pour tout x et y dans $\mathcal{H}$. Montrer que p est la projection orthogonale sur $\operatorname{im} p$.

Exercice 5
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit p un élément idempotent de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. On suppose que $p \neq 0$.

(1) Montrer que $|||p||| \geqslant 1$.

(2) On suppose désormais que $|||p||| = 1$.

(a) Soit x appartenant à $\ker p$ et soit y appartenant à $\operatorname{im} p$. Posons $\alpha = \langle x, y\rangle$ et $z_t = x + \alpha t y$ pour tout t dans $\mathbb{R}$.

(i) Calculer $\|z_t\|^2 - \|p(z_t)\|^2$;

(ii) En déduire que $\langle x, y\rangle = 0$.

(b) En déduire que p est la projection orthogonale sur $\operatorname{im} p$.

Exercice 6
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe et soit $\Phi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire. On définit
$$\|\Phi\| = \sup\{|\Phi(x, y)|; x, y \in \mathcal{H},\ \|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \leqslant 1\} \in [0, +\infty].$$

(1) Montrer que $\|\Phi\| = \inf\{M \geqslant 0; |\Phi(x, y)| \leqslant M\|x\|\|y\| \text{ for all } x, y \in \mathcal{H}\}$.

(2) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) Φ est continue en $(0, 0)$,

(b) Φ est continue,

(c) $\|\Phi\| < \infty$.

(3) Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Montrer que l'application $\Phi_A : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ définie, pour tout x, y dans $\mathcal{H}$, par $\Phi_A(x, y) = \langle Ax, y\rangle$ est une forme sesquilinéaire continue.

(4) Soit $\Phi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire continue. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que, pour tout x, y dans $\mathcal{H}$, on a $\Phi(x, y) = \langle Ax, y\rangle$.

(5) Montrer que $\|\Phi_A\| = \|A\|$ pour tout $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. En déduire que l'application $A \mapsto \Phi_A$ est une isométrie de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ dans l'espace de formes sésquilinéaires continues.