Analyse, feuille d'exercices numéro 2
Les espaces L^p

M1 Mathématiques, S7 2026/2027

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x\left(1+|\ln(x)|\right)^2} \qquad \text{pour tout } x>0.$$

1. Montrer que $f \in L^1_{\mathbb{R}}(]0,1], \mathcal{B}(]0,1]), \lambda_{]0,1]})$, mais que $f \notin L^p_{\mathbb{R}}(]0,1], \mathcal{B}(]0,1]), \lambda_{]0,1]})$ pour $p \in]1,+\infty]$.
2. Montrer que f appartient à $L^p_{\mathbb{R}}([1,+\infty[, \mathcal{B}([1,+\infty[), \lambda_{[1,+\infty[})$ pour $p \in [1,+\infty]$.

Exercice 2. Étudier l'appartenance à $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $p=1,2$ des fonctions définies, pour tout x dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \exp(-x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x), \qquad g(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \qquad h(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}(1+\sqrt{x})}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré $\sigma-$fini. Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$, pour tout $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, on a

$$\int_\Omega |f(\omega)|^p \, \mathrm{d}\mu(\omega) = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\mu\left(\{\omega \in \Omega \text{ tels que } |f(\omega)| \geqslant t\}\right) \mathrm{d}t.$$

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Soit a, $b \geqslant 0$ et p et q dans $[1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
   (a) Montrer que
   $$\frac{1}{p}\ln\left(a^p\right) + \frac{1}{q}\ln\left(b^q\right) \leqslant \ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right).$$
   (b) En déduire l'inégalité de Young suivante :
   $$ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$
2. Inégalité de Hölder : soient p et q dans $[1,+\infty]$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, et $f \in L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $g \in L^q_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Montrer que fg appartient à $L^1_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ et vérifie
   $$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$
3. Inégalité de Minkowski[1] : Déduire de la question précédente que, pour tout $p \in]1,+\infty[$, si f et g sont dans $L^p_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, alors $f+g$ également et vérifie
   $$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

[1] Cette inégalité est également vraie pour $p=1$ et $p=\infty$ mais la démonstration ne nécessite pas l'inégalité de Hölder

Exercice 5. Étudier la convergence dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, pour $p = 1, 2$, des suites de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définies respectivement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f_n(x) = \sqrt{n}\exp(-nx^2), \quad f_n(x) = \frac{n^2\sin(nx)}{2\pi}\mathbf{1}_{\left[-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}\right]}(x), \quad f_n(x) = \frac{2}{\pi n^2}\sqrt{n^2-x^2}\mathbf{1}_{[-n,n]}(x).$$

Exercice 6. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ et f une fonction mesurable de Ω dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f appartient à $L^\infty_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, alors $|f| \leq \|f\|_\infty$ $\mu-$presque partout.
2. Montrer que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f dans $L^\infty_{\mathbb{R}}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ si, et seulement si, il existe un ensemble négligeable $A \in \mathcal{F}$ tel que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f sur A^c.

Exercice 7. On note $\mathcal{C}_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$ est dense dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $p \in [1, +\infty[$.
2. En déduire que, pour toute fonction f dans $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, on a $\|f - f(\cdot + h)\|_p \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 8. Pour toute fonction $\phi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{C}$ et pour $t > 0$, on note $\phi_t : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{C}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par $\phi_t(x) = \frac{1}{t^d}\phi\left(\frac{x}{t}\right)$.

1. Montrer que si $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors $\phi_t \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
2. Soit $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tel que $\int_{\mathbb{R}^d}\phi = 1$.
   (a) Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\|f * \phi_t - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
   (b) Montrer que si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $(f * \phi_t)(x) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ où f est continue.

Exercice 9 (Inégalité de Young)**.** On se place sur $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$.

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1, +\infty]$. Montrer que $(f * g)(x)$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, puis que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et vérifie
$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$
2. Soient p, q dans $[1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $(f * g)(x)$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, puis que $f * g$ est uniformément continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$ et vérifie
$$\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$
3. Soient p, q et r dans $[1, +\infty]$ tels que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $(f * g)(x)$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, puis que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et vérifie
$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$