Analyse, feuille d'exercices numéro 4
Opérateurs linéaires continus

M1 Mathématiques, S7 2026/2027

Exercice 1

Pour $p \in \{1, 2, +\infty\}$, on note $|||\cdot|||_p$ la norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{K}^d)$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{K}^d$. Montrer que, pour tout $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_d(\mathbb{K})$ (vue comme élément de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^d)$),

(1) $|||A|||_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq d} \sum\limits_{j=1}^{d} |a_{i,j}|$, puis $|||A|||_1 = \max\limits_{1\leq j\leq d} \sum\limits_{i=1}^{d} |a_{i,j}|$,

(2) $|||A|||_2 = \max\{\sqrt{\lambda}, \lambda$ est une valeur propre de $A^*A\}$, où A^* est la matrice adjointe de A.

Exercice 2

Déterminer si l'application linéaire $T : E \to E$ est continue dans les cas suivants.

(1) $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$, et $T : f \mapsto fg$ (où $g \in E$ est fixée).

(2) $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$ et $T : P \mapsto P'$.

(3) $E = \mathbb{R}_d[X]$ muni de $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$ et $T : P \mapsto P'$.

(4) $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sum_{k=0}^n k!|a_k|$ et $T : P \mapsto P'$.

(5) $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$ et $T : P(X) \mapsto P(X+1)$.

(6) $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$ et $T : P \mapsto QP$ (où $Q \in E$ est fixé).

Exercice 3

On considère $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout f dans E, on note $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.

(1) On note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphimes continus de $(E, \|\ \|_1)$. On définit $\Phi : E \to E$ par

$$\begin{aligned} \Phi(f) : [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^x f(t)dt. \end{aligned}$$

(a) Montrer que Φ est une application linéaire continue et que $|||\Phi||| \leqslant 1$;

(b) On pose $f_n(x) = ne^{-nx}$ pout tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout $x \in [0,1]$.

(i) Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\Phi(f_n)\|_1$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

(ii) En déduire $|||\Phi|||$.

Exercice 4

Soit $E = \{f \in C^1([0,1]; \mathbb{R}), f(0) = 0\}$. On définit les normes N_0 et N_1 sur E en posant $N_0(f) = \|f\|_\infty$ et $N_1(f) = \|f'\|_\infty$ pour $f \in E$.

(1) Montrer que l'application identité de (E, N_1) dans (E, N_0) est continue.

(2) En considérant la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définie, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in [0,1]$, par $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, montrer que l'application identité de (E, N_0) dans (E, N_1) n'est pas continue.

Exercice 5

Soit $(E, \| \quad \|)$ un espace de Banach. On note $||| \quad |||$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{L}(E)$, l'algèbre des endomorphismes continus de E.

(1) Soit X un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que $|||X||| < 1$. Montrer que la série $\sum X^n$ converge dans $\mathcal{L}(E)$ et déterminer sa limite.

(2) On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes continue.

(a) Montrer que si X appartient à $GL(E)$, alors X^{-1} est continu.

(b) Soit $X \in \mathcal{L}(E)$ tel que $|||X - Id_E||| < 1$. Déduire de la question (1) que $X \in GL(E)$.

(c) Soit $X \in GL(E)$ et soit $X' \in \mathcal{L}(E)$ tel que $|||X' - X||| < \frac{1}{|||X^{-1}|||}$.

(i) Montrer que $X^{-1} \cdot X'$ et $X' \cdot X^{-1}$ appartiennent à $GL(E)$.

(ii) En déduire que X' appartient à $GL(E)$.

(d) Déduire de la question précédente que $GL(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

(3) Montrer que l'application $GL(E) \to GL(E)$; $X \mapsto X^{-1}$ est continue.

Exercice 6

Soit E un espace de Banach et soit F et G deux sous-espaces vectoriels fermés de E tels que $E = F \oplus G$.

(1) On munit $F \times G$ de la norme définie par $\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ pour tout x dans F et y dans G.

(a) Montrer que $(F \times G, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

(b) Pour tout x appartenant à E, soit x_F dans F et x_G dans G tel que $x = x_F + x_G$ (décomposition unique). Montrer que

$$\begin{array}{ccc} E & \to & F \times G \\ x & \mapsto & (x_F, x_G) \end{array}$$

est un opérateur linéaire continu.

(c) En déduire que la projection sur F parallèlement à G est continue.

Exercice 7

Soit $H = \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des suites de carré sommable, muni de la norme $\|\cdot\|_2$ donnée, pour tout $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in H$, par $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^2}$. On note $T : H \to H$, l'opérateur défini, pour tout $x \in H$, par

$$T(x) = \left(\frac{x_k}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}.$$

(1) Montrer que T est bien défini, c'est-à-dire que, pour tout $x \in H$, on a bien $T(x) \in H$.

(2) Montrer que $T \in \mathcal{L}(H)$ et déterminer $\|T\|$.